

Rachunek całkowy

①

Rachunek całkowy powstał i był rozwijany z potrzeby rozwiązywania problemów związanych z obliczaniem pól figur, obrotów brył i ich powierzchni, długości łuków krzywych, i obliczaniem środków ciężkości figur płaskich i brył.

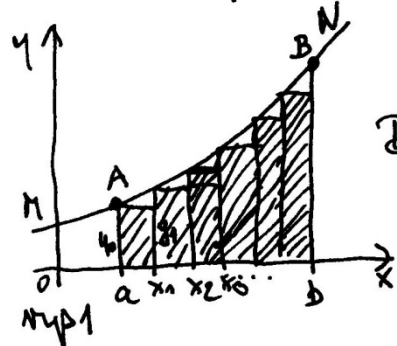
Podstawy rozwiązywania takich problemów określił Archimedes ale dopiero w 17 wieku powstał systematyczny opis metod, którego dokonał Bonaventura Cavalieri (1591-1644) oraz ewangelista Torricelli (1608-1647). Obaj byli uczniami Galileusza. Dwie następne postacie to Fermat, Barrow i wielu innych.

W latach 70-tych 17 wieku Newton i Leibniz powołali te metody z nadaniem różniczkowego odzwierciedlenia rachunek całkowy od crypto geometrycznych problemów.

Zwrotek z nadaniem różniczkowym został wykonany przez Newtona, Leibniza i ich uczniów do rozwinięcia technik całkowania. (Euler, Grzywno, Ostrowski - też)

Koncepty całkowania

Niech krzywa MN (rys 1) będzie opisana równaniem $y = f(x)$ i wtedy będzie naszym zamiarem obliczenie pola trapeza krzywoliniowego ABB_N



Podzielmy przedział ab na n części obrotowych przedziałami $ax_1, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_{n-1}b$

(Przedziały te mogą być równe lub nie) i budujemy figurę „średnią” pokazującą na rys 1.

Pole tej figury można obliczyć sumując pola wszystkich prostokątów

$$F_n = y_0(x_1 - a) + y_1(x_2 - x_1) + \dots + y_{n-1}(b - x_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x_{k+1} - x_k) \quad (1)$$

Jeśli wprowadzimy oznaczenie: $x_1 - x_0 = dx_0, x_2 - x_1 = dx_1, \dots, x_n - x_{n-1} = dx_{n-1}$ otrzymamy

$$F_n = y_0 dx_0 + y_1 dx_1 + \dots + y_{n-1} dx_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k dx_k \quad (2)$$

Obliczone pole figury jest równe ~~polu trapeza~~ granicy wyrażenia (2) dla n zwiększonego do ∞ .

Dla takiej granicy Leibniz wprowadził symbol $\int y dx$ gdzie S jest literą po łacinie, łacińskiego słowa „Summa”

Fourier (1768 - 1830) - francuski matematyk i fizyk ②
 zintensyfikował teorię Lebnura i nadał jej portac'

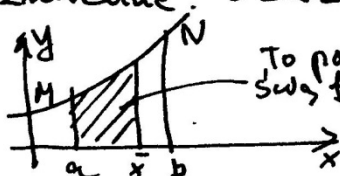
(3) $\int_a^b y dx$ lub $\int_a^b f(x) dx$ gdzie f jest wyrażeniem początkowe
 i końcowa wartość zmiennej x .

Związek między całkowaniem i różniczkowaniem

Załóżmy, że a jest stałe a b zmienna. Oznaczmy to zmienną b przez $\bar{x}$. Wtedy całka

$$\int_a^{\bar{x}} f(x) dx$$

Wyp. 2.



która oznacza pole $aABb$ dla stałej wartości a i zmiennej b
 jest funkcją zmiennej x . Mamy więc:

$$g(\bar{x}) = \int_a^{\bar{x}} f(x) dx$$

Funkcja g nazywa się funkcją „górnej granicy całkowania”

Pochodna funkcji $g(\bar{x})$ jest funkcją $f(\bar{x})$.

[Właściwość „różniczkowania funkcji $g(\bar{x})$ jest równa $f(\bar{x}) d\bar{x}$]

$$d g(\bar{x}) = d \int_a^{\bar{x}} f(x) dx = f(\bar{x}) \cdot d\bar{x}$$

Główny problem rachunku całkowego

Obliczenie całki (3) sprowadza się do „znalezienia funkcji
 z danej jej różniczkowej”.

Podstawowym zadaniem rachunku całkowego jest zatem
 znalezienie tej funkcji.

Funkcja pierwotna

Definicja: Niech funkcja $f(x)$ będzie pochodną funkcji $F(x)$,
 tzn. że $f(x) dx$ jest różniczką funkcji $F(x)$

$$\text{Gdy: } f(x) dx = dF(x)$$

Wtedy funkcja $F(x)$ jest nazywana „funkcją pierwotną”
 funkcji $f(x)$.

Przykład 1. Funkcja $3x^2$ jest pochodną funkcji x^3 , tzn. (3)
 $3x^2 dx = d(x^3)$
Zatem x^3 jest funkcją pierwotną funkcji $3x^2$

Przykład 2. Wypadek $3x^2 dx$ jest różniczką funkcji $x^3 + 7$
bo $3x^2 dx = d(x^3 + 7) = d(x^3) + d(7) = d(x^3) + 0$
Zatem funkcja $x^3 + 7$ (tak samo jak funkcja x^3)
jest funkcją pierwotną funkcji $3x^2$

Wniosek: Każda ciągła funkcja $f(x)$ ma uśrednianie
wobec funkcji pierwotnych różniących się o
dowolny stały.

Jeśli $F(x)$ jest pewną funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to
każda funkcja postaci $F(x) + C$ (gdzie $C \in \mathbb{R}$) jest
także funkcją pierwotną funkcji $f(x)$.

Całka uśredniawcza

Całkę uśredniawczą danego wyrażenia $f(x)dx$ (dla danej funkcji
 $f(x)$) jest najbardziej ogólna postać jej funkcji pierwotnej.

Całkę uśredniawczą wyrażenia $f(x)dx$ zapisać można w postaci
 $\int f(x) dx$

Wypadek $f(x)dx$ nazywa się wypaściem podcałkowym,
funkcja $f(x)$ nazywa się funkcją podcałkową, zmienna
 x jest zmienną całkowania (zmienna, względem której
całkujemy)

Znajdując całość uśredniawczą danej funkcji
nazywamy całkowaniem.

Przykład 1. Najbardziej ogólną formą funkcji pierwotnej
wyrażenia $2x dx$ jest $x^2 + C$. Ta funkcja jest
zatem całką uśredniawczą wyrażenia $2x dx$.

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

Mając tę napisac' $\int 2x = x^2 - 5 + C_1$

Wtedy $C = C_1 - 5$.

Przykład 2. Znaleźć całkę uogólnioną wyrażenia $\cos x dx$ (4)

Rozwiązanie: Funkcja $\cos x$ jest pochodną funkcji $\sin x$.

$$\text{Zatem } \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Przykład 3. Znaleźć całkę uogólnioną wyrażenia $\frac{1}{x} dx$

Rozwiązanie: Funkcja $\frac{1}{x}$ jest nieokreślona dla $x=0$.

Rozważmy zatem najpierw dodatnie wartości x .
Ponieważ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ więc

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C. \quad (4)$$

Z drugiej strony funkcja $\ln(-x)$ jest określona
(dla $x < 0$) ~~nie~~ jej pochodną jest także równa $\frac{1}{x}$
(bo $(\ln(-x))' = (\ln[(-1) \cdot x])' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$)

$$\text{Wobec } \int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C \quad (5)$$

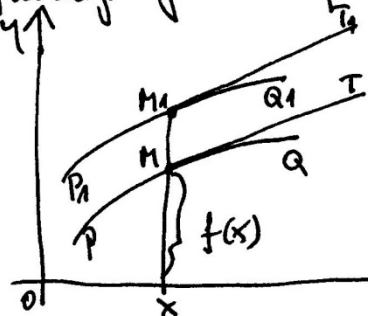
Formuły (4) i (5) można połączyć w jedną

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (6)$$

Wyrażenie (6) opisuje całkę uogólnioną funkcji $\frac{1}{x}$
dla wszystkich x z wyjątkiem $x=0$.

Geometryczna interpretacja całkowania

Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą, a $F(x)$ będzie jedną z jej
funkcji pierwotnych. Jeśli utworzymy wykres funkcji $F(x)$
w postaci krzywej PQ, to uciętym
styczną jest określone przez wartości
funkcji f . (rys. 3)



Rys. 3.

Niech ~~F(x)~~ $F_1(x)$ będzie inną z funkcji
~~przerobionych~~ pierwotnych funkcji f , która
wykres w postaci krzywej P_1Q_1 przedstawia
rys. 3. Styczna do P_1Q_1 jest równoległa
do stycznej ~~do~~ do PQ.

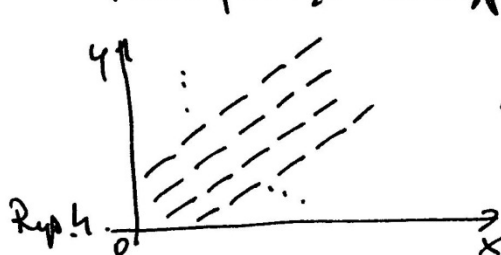
Wykres funkcji pierwotnej narysowaliśmy jako krzywą całkową funkcji $f(x)$. Różne krzywe całkowe odpowiadające różnym funkcjom pierwotnym są oddalone od siebie o stałą dystans.

Korzystając z przypisania można konstruować następująco. (5)
 Przez różne punkty płaszczyzny wyznaczyć krótkie odcinki skierowane
 kierunek stycznej do krzywej całkowej.
 Otrzymujemy w ten sposób "pole kierunków". Następnym
 etapem odznaczając pładkie krzywe dotykające wyznaczonych
 odcinków.

Przykład 1 Znaleźć krzywe całkowe całki urocznicowej

$$\int dx$$

Rozwiązanie: Funkcja $f(x) = 1$ jest stała i określa nachylenie
 stycznej dla każdego x . (45° z dodat. kierunku osi Ox)
 Mamy więc następujący rysunek



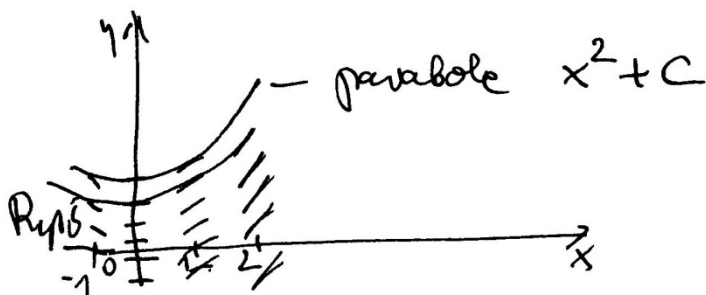
Zatem krzywe całkowe są
 wykreślan funkcji
 $y = x + C$ gdzie $C \in \mathbb{R}$

Przykład 2 Znaleźć krzywe całkowe dla całki urocznicowej

$$\int x dx$$

Rozwiązanie: Funkcja $f(x) = x$ określa "pole kierunków" ~~stałe~~

dla $x = 0$	kt nachylenie 0
dla $x = 1$	kt nachylenie 45°
dla $x = 2$	kt $\dots$ α taki, że $\tan \alpha = 2$
dla $x = -1$	kt $\dots$ 135°



Własności całki urocznicowej

1. Pochodna całki urocznicowej jest równa funkcji podcałkowej
 $(\int f(x) dx)' = f(x); \quad \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$
2. Całka z pochodnej funkcji podcałkowej jest równa
 dowolnej funkcji postaci $f(x) + C, C \in \mathbb{R}$

$$\int (f(x))' dx = f(x) + C$$

(6)

Tablica całek

Każda formuła różniczkowania po odwróceniu staje się formułą całkowania np.

$$\left[\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \right]' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \text{zatem}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

Uwaga: Wyrażenie $x + \sqrt{a^2 + x^2}$ jest dodatnie dla dowolnego x więc nie musimy pisać $\ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}|$

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$3. \int e^x dx = e^x + C$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arcsin} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$13. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$14. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C$$

$$16. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + C$$

$$17. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

Własności całek uogólnionych

$$\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$$

$$\int a f dx = a \int f dx$$

$$\boxed{\int f(x) dx = \int f(z) dz} \quad (\text{Podstawienie})$$

$$\text{np. } x = 2z \rightarrow dx = 2dz$$

$$\int f(x) dx = \int f(2z) \cdot 2 dz =$$

$$= \int 2 f(2z) dz = 2 \int f(2z) dz$$

$$\boxed{\int f' g dx = f g - \int f \cdot g' dx} \quad \text{Przeł. Częłw.}$$